Universidade de Brasília
Departamento de Economia

Série Textos para Discussão

Medida gradiente de mobilidade regional

Rodrigo Peñaloza
Herton Ellery Araújo

Texto No 352
Brasília, Janeiro de 2011

Department of Economics Working Paper 352
University of Brasilia, January 2011

Medida gradiente de mobilidade regional

Rodrigo Peñaloza[*] Herton Ellery Araújo[†]

Universidade de Brasília IPEA

Janeiro, 2011

Abstract: We propose a new measure of regional mobility: the gradient measure of mobility. Besides the extension, it also captures the overall intensity of migration and is comprised of the marginal impacts of each locality over the population distribution. We compare it with standard measures of mobility, such as the accounting measure and the Yasuda's measure, and give some characterizations in terms of Hirschmann-Herfindahl indexes.

Keywords: Demography, measures of regional mobility.

JEL classification: J10.

1 Introdução

A migração de indivíduos entre localidades diferentes (ou mesmo a migração entre classes sociais) pode ser mensurada de diversas formas. Salvo ligeiras adaptações, as mesmas fórmulas podem ser usadas tanto como instrumentos demográficos de mensuração da mobilidade como instrumentos sociométricos de mensuração da dinâmica de classes sociais. Nosso interesse é contribuir para a família de medidas de mobilidade baseadas na matriz de migração, que especifica as migrações entre localidades (ou classes sociais) durante um intervalo de tempo, o período migratório. Sem perda de generalidade, falaremos sempre de mobilidade regional.

O que fazemos neste artigo é oferecer uma medida de mobilidade fundamentada nos impactos distribucionais marginais de cada localidade para a distribuição da população

[*]Correspondência para: Rodrigo Peñaloza. Universidade de Brasília (UnB), Departamento de Economia & Centro de Investigação em Economia e Finanças (CIEF), FACE. Brasília, DF 70910-900 BRASIL. Tel: +(55)(61)3307-3947, FAX: +(55)(61)3307-3438, e-mail: penaloza@unb.br.

[†]Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada (IPEA), SBS quadra-1, bloco-J, ed. BNDS, sala 1408, Brasília, DF 70070-110 BRASIL. Tel.: +(55)(61)3315-5118, e-mail: herton.araujo@ipea.gov.br.

em uma certa região. A ideia é imaginar que a migração é um fluxo multivariado e que nossa medida de mobilidade é como uma derivada direcional na direção das localidades que mais contribuem para a migração. Por isso, a denominamos de medida gradiente de mobilidade. Além disso, mostramos que, enquanto algumas medidas usuais na literatura, como a medida contábil de mobilidade e a medida de Yasuda, são incapazes de mensurar ou distinguir fenômenos importantes visíveis na própria matriz de migração, a medida gradiente de mobilidade, ao contrário, consegue incluí-los na mensuração. Não é nossa intenção apresentar um survey das medidas existentes e suas aplicações empíricas. Uma revisão das medidas usuais de mobilidade existentes pode ser encontrada em Souza (1988), para onde referimos o leitor interessado.

Na seção 2 apresentamos os ingredientes da técnica de mobilidade regional e apresentamos as medidas mais usuais e alguns de seus problemas. Na seção 3 construímos a medida gradiente de mobilidade regional e a comparamos com as medidas apresentadas na seção anterior. A seção 4 conclui o artigo.

2 Mensuração da mobilidade regional

2.1 Preliminares

Considere uma região $\mathcal{R}$ com uma população total de N indivíduos distribuídos em K localidades em $\mathcal{R}$. Durante um intervalo fixo de tempo $[0, T]$, que chamaremos de período migratório, parte dos indivíduos migra de uma localidade para outra.[1] Seja n_{ij} o número de indivíduos que migram da localidade i para a localidade j. Obviamente, n_{ii} é o número de indivíduos que não migram da localidade i, isto é, que permanecem na localidade i. Além disso, $\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} n_{ij} = N$. A matriz $\mathbf{N} = [n_{ij}]_{K\times K}$ é dita *matriz de mobilidade absoluta* ou simplesmente *matriz de migração*. Defina:

(a) $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{K} n_{ij}$: número de indivíduos que migram de i, incluindo os que permanecem em i.

(b) $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{K} n_{ij}$: número de indivíduos que migram para j, incluindo os que já estavam em j.

(c) $n_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} n_{ij}$: número total de indivíduos.

[1]Durante o intervalo de tempo $[0, T]$, um indivíduo pode migrar sequencialmente para diversas localidades e, até o instante T, estabelecer-se numa localidade final. Para todos os efeitos, essas migrações intermediárias são negligenciadas. Por isso, é importante entender a medida que propomos (como, aliás, qualquer outra medida de mobilidade regional) como uma medida de intensidade por unidade de tempo.

(d) $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}}$: proporção de indivíduos da localidade i que migram para j.

(e) $q_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet\bullet}}$: proporção de indivíduos da região $\mathcal{R}$ que migram de i para j.

(f) $q_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{K} q_{ij}$: proporção de indivíduos da região $\mathcal{R}$ que migram de i.

(g) $q_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{K} q_{ij}$: proporção de indivíduos da região $\mathcal{R}$ que migram para j.

Note que a população da localidade i antes do período migratório é $n_{i\bullet}$, ou seja, a soma dos que migram mais os que permanecem, e que $q_{i\bullet}$ é igual à participação da população de i relativamente à população total antes do período migratório. Além disso, $n_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{K} n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{K} n_{\bullet j} = N$. A matriz $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{K\times K}$ indica as proporções de indivíduos da região $\mathcal{R}$ que migram entre pares de localidades e é dita *mapa de mobilidade*.

2.2 Medidas usuais de mobilidade

Nesta seção apresentamos algumas medidas de mobilidade usuais na literatura e mostramos alguns de seus problemas a fim de justificarmos a medida gradiente de mobilidade que proporemos adiante.

A *medida contábil de mobilidade regional* é:

$$\mu(\mathbf{N}) = \frac{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}{n_{\bullet\bullet}}$$

e ela mede o total de indivíduos que migram para outras localidades relativamente ao total de indivíduos. Observe que $\mu(\mathbf{N}) = 1 - tr(\mathbf{Q})$, em que $tr(\mathbf{Q})$ é o traço[2] do mapa de mobilidade. É claro que $0 \leq \mu(\mathbf{N}) \leq 1$. Se $\mu(\mathbf{N}) = 0$, então $\sum_{i=1}^{K} n_{ii} = n_{\bullet\bullet}$, ou seja, todos os indivíduos permanecem em suas localidades, de modo que não há migração.[3] Se $\mu(\mathbf{N}) = 1$, então $\sum_{i=1}^{K} n_{ii} = 0$, ou seja, todos os indivíduos migram de suas localidades, de modo que a migração é máxima.[4] Considere as seguintes matrizes de migração:

$$\mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 40 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_b = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 35 & 5 \end{bmatrix}$$

Então $\mu(\mathbf{N}_a) = \mu(\mathbf{N}_b) = 0,8$. No caso de $\mathbf{N}_a$, toda a população da localidade 1 permanece, mas toda a população da localidade 2 migra para a localidade 1. A localidade 1 não tem qualquer contribuição para a medida de mobilidade. Toda a migração é devida ao êxodo dos habitantes da localidade 2. No caso de $\mathbf{N}_b$, metade da população da localidade 1 permanece e metade migra, ao passo que $12,5\%$ dos habitantes da localidade 2

[2] O traço de uma matriz quadrada é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

[3] Isso só ocorre quando a matriz de migração $\mathbf{N}$ é diagonal.

[4] Isso ocorre quando a diagonal da matriz de migração $\mathbf{N}$ é inteiramente constituída de zeros.

permanecem e $87,5\%$ migram. A localidade 2 apresenta uma contribuição menor para a mobilidade e a localidade 1 apresenta, agora, alguma contribuição. Entretanto, a medida contábil de mobilidade regional, da forma agregada como é definida, é incapaz de captar essas diferenças.[5]

Outras medidas de mobilidade regional respeitam o *princípio da mobilidade perfeita*, segundo o qual, em uma região, a mobilidade máxima equivale à independência estatística entre suas localidades. Tome aleatoriamente um indivíduo e simbolize-o por $i \to j$, caso ele tenha migrado de i para j. É claro que muitos indivíduos migram de i para j, de modo que o indivíduo representativo $i \to j$ tem peso q_{ij}, igual à fração de migrantes de i para j relativamente à população total. Com efeito, substituindo o conceito de migração pelo conceito de probabilidade de migração, então um estimador consistente para a probabilidade de migração de i para j é $\Pr[i \to j] = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet\bullet}} = q_{ij}$, ou seja, a frequência relativa da migração de i para j.[6] Considere os seguintes eventos aleatórios: $E_{i\bullet} =$ [o indivíduo escolhido é proveniente da localidade i] e $E_{\bullet j} =$ [o indivíduo escolhido migrou para a localidade j]. O evento $E_{i\bullet} \cap E_{\bullet j} = [i \to j]$ consiste no fato de o indivíduo sorteado ter migrado de i para j. Se $\Pr[E_{i\bullet}] > 0$, então a probabilidade de $[i \to j]$ satisfaz:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \Pr[i \to j] \\ &= \Pr[E_{i\bullet} \cap E_{\bullet j}] \\ &= \Pr[E_{i\bullet}] \Pr[E_{\bullet j} | E_{i\bullet}] \\ &= q_{i\bullet} \Pr[E_{\bullet j} | E_{i\bullet}] \end{aligned}$$

em que $q_{i\bullet}$ é obviamente um estimador consistente de $\Pr[E_{i\bullet}]$. Por outro lado, $\Pr[E_{\bullet j}|E_{i\bullet}] \leq \Pr[E_{\bullet j}] = q_{\bullet j}$, de modo que $q_{ij} \leq q_{i\bullet} \times q_{\bullet j}$. A independência estatística entre $E_{i\bullet}$ e $E_{\bullet j}$ é caracterizada pela igualdade $q_{ij} = q_{i\bullet} \times q_{\bullet j}$ e a mobilidade máxima pela relação $\Pr[E_{\bullet j}|E_{i\bullet}] = \Pr[E_{\bullet j}]$, que equivale à independência dos eventos[7]. Ora, a igualdade $q_{ij} = q_{i\bullet} \times q_{\bullet j}$ significa que $n_{\bullet\bullet} \times n_{ij} = n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}$. Com efeito, basta observarmos que

[5] Observe que uma medida agregada de mobilidade (uma que seja um número sintético para toda a região) pode, ainda assim, captar as contribuições das localidades para a medida global, sendo ela mesma, por exemplo, uma média das contribuições locais. A medida que proporemos neste trabalho possui exatamente esse caráter. Nesse sentido, ela é diferente das medidas usuais.

[6] Com efeito, considere como espaço amostral o conjunto de todas as migrações, $\Omega = \{i \to j : i, j = 1, \ldots, K\}$. Por ser finito, supomos que qualquer subconjunto é mensurável. A medida de probabilidade Pr mede a probabilidade de cada ponto amostral $i \to j$. Pela hipótese de independência associada à mobilidade perfeita, o problema se resume a encontrar um estimador consistente para Pr a partir de uma amostra aleatória retirada de um modelo binomial $\textsc{Bin}(K^2, \Pr)$. A frequência relativa, para esse modelo, é claramente um estimador consistente, tanto, por exemplo, pelo critério da máxima verossimilhança como pelo método de momentos. Esse argumento implícito é o que justifica, ao longo deste trabalho, o uso das frequências empíricas no lugar das probabilidades verdadeiras.

[7] A mobilidade perfeita significa que a migração dos indivíduos é basicamente com fenômeno aleatório,

$\frac{n_{ij}}{n_{\bullet\bullet}} = \left(\sum_{j=1}^{K} q_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{K} q_{ij}\right)$ e substituirmos $q_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet\bullet}}$ na expressão acima, obtendo, assim, $\frac{n_{ij}}{n_{\bullet\bullet}} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n_{\bullet\bullet}^2}$. O afastamento entre $n_{\bullet\bullet} \times n_{ij}$ e $n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}$ corresponde ao afastamento da estrutura de mobilidade máxima de i para j. Assim, para a localidade i, seu grau de imobilidade ou de resistência migratória pode ser descrita pelo índice de Glass:

$$\mathcal{G}_i = \frac{n_{\bullet\bullet} \times n_{ii}}{n_{i\bullet} \times n_{\bullet i}}$$

Como $n_{\bullet\bullet} \times n_{ij} \leq n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}$, $\forall i, j$, então, em particular, $n_{\bullet\bullet} \times n_{ii} \leq n_{i\bullet} \times n_{\bullet i}$, donde $0 \leq \mathcal{G}_i \leq 1$. Se $\mathcal{G}_i = 1$, então a permanência na localidade i é totalmente aleatória, de modo que a localidade i não oferece qualquer resistência à migração de seus habitantes. Quanto menor $\mathcal{G}_i$, maior o afastamento entre $n_{\bullet\bullet} \times n_{ii}$ e $n_{i\bullet} \times n_{\bullet i}$, ou seja, ter migrado para i torna-se mais dependente estatisticamente do fato de ter saído de i. Em outras palavras, a permanência em i (migração de i para i) é resultado de alguma força externa que torna a permanência em i menos independente do fato de a permanência ser exatamente "na" localidade i, de modo que a localidade i apresenta, assim, alguma imobilidade intrínseca. O índice de Glass capta, assim, a fluidez migratória de cada localidade. Quanto menor o índice de Glass, mais resistente é a localidade à migração, ou seja, menos fluido é seu processo migratório. Quanto maior o índice, seu processo de migração é mais fluido, menos viscoso.

A ideia de independência de eventos migratórios sugerida pelo índice de Glass permite estabelecer algumas definições adicionais. Mobilidade estrutural ou mobilidade forçada é aquela que resulta de forças exógenas que agem sobre o processo natural de migração dos indivíduos dentro da região. Mobilidade pura é o complemento da mobilidade estrutural em relação à mobilidade total. Para uma dada localidade i, esses três tipos de mobilidade podem ser definidos do seguinte modo:

(a) mobilidade total: $m_T^{(i)} = n_{i\bullet} - n_{ii}$

(b) mobilidade estrutural: $m_E^{(i)} = (n_{i\bullet} - n_{ii}) - \min\{n_{i\bullet} - n_{ii}, n_{\bullet i} - n_{ii}\}$

(c) mobilidade pura: $m_P^{(i)} = m_T^{(i)} - m_E^{(i)}$

A mobilidade total apenas contabiliza o total de indivíduos que deixaram a localidade rumo a outra localidade qualquer. A mobilidade estrutural retira desse total o mínimo entre a emigração de i e a imigração para i. Se o total de indivíduos que deixaram i não supera o total dos que se mudaram para i, ou seja, se $n_{i\bullet} - n_{ii} \leq n_{\bullet i} - n_{ii}$, então a

como se os indivíduos fossem partículas que se deslocam aleatoriamente sobre uma rede finita de acordo com o modelo binomial. É, obviamente, um caso irreal, mas serve como limite epistemológico de um modelo que procura captar a extensão de fatores externos à migração.

mobilidade estrutural é $m_E^{(i)} = 0$. No caso contrário, é $m_E^{(i)} = n_{i\bullet} - n_{\bullet i}$, isto é, a emigração líquida de i. Desse modo:

$$m_E^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{se } n_{i\bullet} - n_{ii} \leq n_{\bullet i} - n_{ii} \\ n_{i\bullet} - n_{\bullet i}, & \text{se } n_{i\bullet} - n_{ii} > n_{\bullet i} - n_{ii} \end{cases}$$

Note que $m_P^{(i)} = \min\{n_{i\bullet} - n_{ii}, n_{\bullet i} - n_{ii}\}$. A mobilidade pura máxima ocorre quando a mobilidade estrutural é zero, ou seja, $m_{P,\max}^{(i)} = n_{i\bullet} - n_{ii}$. O *índice de mobilidade pura de Yasuda da localidade* i é definido por $\mathcal{Y}_i = \frac{m_P^{(i)}}{m_{P,\max}^{(i)}}$, isto é:

$$\mathcal{Y}_i = \min\{1, \frac{n_{\bullet i} - n_{ii}}{n_{i\bullet} - n_{ii}}\}$$

Claramente, $0 \leq \mathcal{Y}_i \leq 1$. Se $\mathcal{Y}_i = 0$, então $n_{\bullet i} - n_{ii} = 0$, ou seja, ninguém deixou a localidade i. Se $\mathcal{Y}_i = 1$, então $\frac{n_{\bullet i} - n_{ii}}{n_{i\bullet} - n_{ii}} \geq 1$, ou seja, $n_{\bullet i} - n_{ii} \geq n_{i\bullet} - n_{ii}$, o que significa que, para a localidade i, o total de emigrantes é pelo menos tão grande quanto o de imigrantes. Se $0 < \mathcal{Y}_i < 1$, então, para a localidade i, o total de emigrantes é menor do que o de imigrantes e a medida de Yasuda mede a relação daquele número sobre este.

O problema óbvio com a medida de Yasuda é que ela só mensura a mobilidade para localidades que estão crescendo por conta da imigração e negligencia aquelas que decrescem e, justamente por isso, contribuem para o crescimento de outras localidades. Para as mesmas matrizes de migração $\mathbf{N}_a$ e $\mathbf{N}_b$ dadas como exemplo anteriormente, temos $\mathcal{Y}_1(\mathbf{N}_a) = \mathcal{Y}_1(\mathbf{N}_b) = 1$, ou seja, a medida de Yasuda não diferencia entre a imobilidade total da localidade 1 e a sua mobilidade baixa relativamente à localidade 2.[8]

3 Medida gradiente de mobilidade regional

Apresentaremos agora uma medida de mobilidade regional que leva em conta as contribuições de cada localidade para as perturbações distribucionais da população causadas pelas migrações. A natureza da medida que propomos é intimamente ligada à noção de gradiente, que aponta para a direção de maior crescimento de um fluxo, e de derivada direcional.

Se $n_{i\bullet}$ é a população da localidade i antes do período migratório, então denote por $f_i = \frac{n_{i\bullet}}{N}$ a participação relativa da população da localidade i na população total da região $\mathcal{R}$. Seja $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_K)$ o vetor de participações relativas populacionais das localidades de $\mathcal{R}$. Fixe uma localidade i qualquer e considere o conjunto $\{n_{ij} : j \neq i\}$ das migrações

[8] As medidas são $\mathcal{Y}_1(\mathbf{N}_a) = 1$, $\mathcal{Y}_2(\mathbf{N}_a) = 0$, $\mathcal{Y}_1(\mathbf{N}_b) = 1$ e $\mathcal{Y}_2(\mathbf{N}_b) = \frac{1}{7} = 0,14286$.

de i para todas as outras localidades. Defina o seguinte vetor auxiliar de populações $\boldsymbol{\nu}_i = (\nu_1^{(i)}, \ldots, \nu_K^{(i)})$, em que:

$$\nu_k^{(i)} = \begin{cases} n_{ii}, & \text{se } k = i \\ n_{k\bullet} + n_{ik}, & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

Esse vetor auxiliar reconstrói o vetor inicial de populações das localidades retirando de i todos os seus migrantes e recontando as populações das outras localidades $j \neq i$ acrescentando a cada uma delas os migrantes de i que para lá foram. Com isso, captamos o efeito que a localidade i tem, *caeteris paribus*, sobre as demais localidades. Observe que, por hipótese, a população total é a mesma. Para cada $\boldsymbol{\nu}_i$, defina o novo vetor de participações relativas populacionais $\mathbf{f}^{(i)} = (f_1^{(i)}, \ldots, f_K^{(i)})$, em que $f_j^{(i)} = \frac{\nu_j^{(i)}}{N}$.

Seja $\Delta_{K-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^K : \sum_{i=1}^K x_i = 1\}$ o simplexo unitário. Sobre Δ_{K-1} considere a métrica euclidiana normalizada $\delta_K : \Delta_{K-1} \times \Delta_{K-1} \to [0, 1]$, definida por:

$$\begin{aligned} \delta_K^2(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{f}) &= \frac{1}{2}||\mathbf{f}^{(i)} - \mathbf{f}||^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}(f_j^{(i)} - f_j)^2 \end{aligned}$$

A divisão por 2 é para normalizar os valores assumidos pela métrica para dentro do intervalo $[0, 1]$. Ela mensura o impacto que a migração de i, *caeteris paribus*, tem sobre a distribuição populacional no período migratório. Se encarássemos a migração como um fluxo multivariado, a medida acima seria, a menos do termo quadrático, como uma derivada parcial em relação à localidade i. Por essa razão, definimos $\nabla_i(\mathbf{N}) = \delta_K(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{f})$ como o *gradiente migratório de* $\mathbf{N}$ *relativamente à localidade* i. Na região $\mathcal{R}$, o total de migrantes é $n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^K n_{ii}$. Assim, o peso migratório da localidade i é $\lambda_i = \frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^K n_{ii}}$.

A *medida gradiente de mobilidade regional* que propomos é dada por:

$$\partial(\mathbf{N}) = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i \nabla_i(\mathbf{N})$$

que é uma espécie de derivada direcional do fluxo migratório na direção dos pesos migratórios.

Para ilustrarmos a vantagem que nossa medida possui sobre a de Yasuda, considere novamente as matrizes de migração:

$$\mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 40 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_b = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 35 & 5 \end{bmatrix}$$

Em primeiro lugar, analisaremos $\mathbf{N}_a$. Temos que $\nabla_1(\mathbf{N}_a) = 0$ e $\nabla_2(\mathbf{N}_a) = \frac{4}{5}$.[9] Note que a contribuição parcial da localidade 1 é nula porque ninguém emigrou de 1. Os pesos migratórios são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, de modo que $\partial(\mathbf{N}_a) = 0,8$.

Quanto a $\mathbf{N}_b$, temos $\nabla_1(\mathbf{N}_b) = \frac{1}{10}$ e $\nabla_2(\mathbf{N}_b) = \frac{7}{10}$.[10] Ao contrário da medida de Yasuda, o gradiente migratório atribui um valor diferente para a localidade 1 de acordo com a matriz de migração, o que não ocorreu com a medida de Yasuda, mesmo que, em termos líquidos, a localidade 1 seja uma receptora de migrantes. Os pesos migratórios são $\lambda_1 = \frac{1}{8}$ e $\lambda_2 = \frac{7}{8}$, de modo que a medida gradiente de mobilidade regional é $\partial(\mathbf{N}_b) = 0,625$.

Vamos encontrar uma caracterização do gradiente de mobilidade relativamente à localidade i.Para tanto, mais definições são necessárias. Em primeiro lugar, $\tau = \frac{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}{N}$ é a fração de migrantes na população total da região. Note que, na verdade, $\tau = \mu(\mathbf{N})$. Além disso, se levarmos em conta a distribuição de todos os emigrantes de i em relação às diferentes localidades a que se dirigem, ou seja, $\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}}$, para todo $k \neq i$, então $\mathcal{H}_i = \sum_{k \neq i} (\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}})^2$ é o índice de Hirschmann-Herfindahl dos emigrantes de i relativamente a todas as demais localidades. Com isso, temos o resultado a seguir.

Teorema: $\nabla_i(\mathbf{N}) = \tau \lambda_i \times \sqrt{\frac{1+\mathcal{H}_i}{2}}$.

Demonstração: Seja $f_k = \frac{n_{k\bullet}}{N}$ a participação relativa da população da localidade k na população total da região $\mathcal{R}$. Fixe uma localidade i qualquer. Recorde que $\mathbf{f}^{(i)} = (f_1^{(i)}, \ldots, f_K^{(i)})$, em que $f_j^{(i)} = \frac{\nu_j^{(i)}}{N}$ e:

$$\nu_k^{(i)} = \begin{cases} n_{ii}, & \text{se } k = i \\ n_{k\bullet} + n_{ik}, & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

Então:

$$f_k^{(i)} = \begin{cases} \frac{n_{ii}}{N}, & \text{se } k = i \\ \frac{n_{k\bullet} + n_{ik}}{N}, & \text{se } k \neq i \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f_k^{(i)} - f_k &= \begin{cases} \frac{n_{ii}}{N} - \frac{n_{i\bullet}}{N}, & \text{se } k = i \\ \frac{n_{k\bullet} + n_{ik}}{N} - \frac{n_{k\bullet}}{N}, & \text{se } k \neq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{n_{ii} - n_{i\bullet}}{N}, & \text{se } k = i \\ \frac{n_{ik}}{N}, & \text{se } k \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

[9] Para efeito de cômputo, note que $\mathbf{f} = (\frac{10}{50}, \frac{40}{50})$, $\mathbf{f}^{(1)} = (\frac{10}{50}, \frac{40}{50})$ e $\mathbf{f}^{(2)} = (\frac{50}{50}, \frac{0}{50})$. Portanto, $\delta^2(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}) = 0$ e $\delta^2(\mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{f}) = \frac{16}{25}$.

[10] Para efeito de cômputo, temos que $\mathbf{f} = (\frac{10}{50}, \frac{40}{50})$, $\mathbf{f}^{(1)} = (\frac{5}{50}, \frac{45}{50})$, $\mathbf{f}^{(2)} = (\frac{45}{50}, \frac{5}{50})$, $\delta^2(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}) = \frac{1}{100}$ e $\delta^2(\mathbf{f}^{(2)}, \mathbf{f}) = \frac{49}{100}$.

Logo:

$$\begin{aligned}
2\delta_K^2(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{f}) &= \sum_{k=1}^{K}(f_k^{(i)} - f_k)^2 \\
&= (\frac{n_{ii} - n_{i\bullet}}{N})^2 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{N})^2 \\
&= (\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{N})^2 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{N})^2
\end{aligned}$$

em que, na última igualdade, apenas usamos o fato de que $(n_{ii} - n_{i\bullet})^2 = (n_{i\bullet} - n_{ii})^2$. Sabemos que $n_{i\bullet} - n_{ii}$ é o total de emigrantes de i. Então $\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}}$ é a fração de emigrantes que deixam i e se movem para $k \neq i$. Assim:

$$\begin{aligned}
2\delta_K^2(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{f}) &= (\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{N})^2 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{N})^2 \\
&= (\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{N})^2 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{N})^2(\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}})^2 \\
&= (\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{N})^2 \left[1 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}})^2\right]
\end{aligned}$$

Lembre que o peso migratório é $\lambda_i = \frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}$. Já $\tau = \frac{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}{N}$ é a fração de migrantes na população total da região. Além disso, se levarmos em conta a distribuição de todos os emigrantes de i em relação às diferentes localidades a que se dirigem, ou seja, $\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}}$, para todo $k \neq i$, então $\mathcal{H}_i = \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}})^2$ é o índice de Hirschmann-Herfindahl dos emigrantes de i relativamente a todas as demais localidades. Então:

$$\begin{aligned}
2\delta_K^2(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{f}) &= (\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{N})^2 \left[1 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}})^2\right] \\
&= \left(\frac{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}{N}\right)^2 \left(\frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}\right)^2 \left[1 + \sum_{k \neq i}(\frac{n_{ik}}{n_{i\bullet} - n_{ii}})^2\right] \\
&= \tau^2 \lambda_i^2 (1 + \mathcal{H}_i)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\nabla_i(\mathbf{N}) &= \delta_K(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{f}) \\
&= \sqrt{\frac{\tau^2 \lambda_i^2 (1 + \mathcal{H}_i)}{2}} \\
&= \tau \lambda_i \times \sqrt{\frac{1 + \mathcal{H}_i}{2}}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\blacksquare$

De acordo com a relação $\nabla_i(\mathbf{N}) = \tau\lambda_i \times \sqrt{\frac{1+\mathcal{H}_i}{2}}$, o gradiente de mobilidade relativamente à localidade i aumenta em decorrência de dois fatores idiossincráticos: a fração λ_i de migrantes que partem da localidade i relativamente ao total de migrantes na região e a concentração dos destinos migratórios. Já a proporção de migrantes na população total, $\tau = \mu(\mathbf{N})$, é um fator comum a todos os gradientes locais. Dessa forma, se duas localidades distintas têm igual participação relativa na migração total, terá maior gradiente aquela cujos migrantes concentraram mais seus destinos migratórios, ou seja, aquela cujos migrantes se moveram praticamente para as mesmas poucas localidades. Isso faz sentido, pois, *caeteris paribus*, quando os destinos migratórios são mais concentrados, o impacto sobre a distribuição populacional é maior, uma vez que isso aumenta as desigualdades distribucionais da população.

Corolário: Seja $\nabla_i(\mathbf{N})$ o gradiente de mobilidade relativamente a uma localidade i. Então $\tau\lambda_i \times \frac{1}{\sqrt{2(1-1/K)}} \leq \nabla_i(\mathbf{N}) \leq \tau\lambda_i$. Em particular, se os migrantes de uma localidade i se movem para um único destino, então $\nabla_i(\mathbf{N}) = \tau\lambda_i$; se os migrantes de i distribuem-se uniformemente nas demais localidades e o número de localidades é grande o suficiente para podermos considerar $\frac{1}{K} \approx 0$, então $\nabla_i(\mathbf{N}) \approx \tau\lambda_i \times \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Demonstração: Quando o destino migratório é único, então o índice de Hirschmann-Herfindahl atinge seu valor máximo, ou seja, $\mathcal{H}_i = 1$. Portanto, $\sqrt{\frac{1+\mathcal{H}_i}{2}} = 1$, donde $\nabla_i(\mathbf{N}) = \tau\lambda_i$. Por outro lado, se os migrantes de i distribuem uniformemente seus destinos migratórios entre todas as demais localidade, então o índice de Hirschmann-Herfindal atinge seu valor mínimo, $\mathcal{H}_i = \frac{1}{K-1}$. Desse modo, $\sqrt{\frac{1+\mathcal{H}_i}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{K}{K-1}}$, donde $\nabla_i(\mathbf{N}) = \tau\lambda_i \times \frac{1}{\sqrt{2(1-1/K)}}$. Se $\frac{1}{K} \approx 0$, então $\nabla_i(\mathbf{N}) \approx \tau\lambda_i \times \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\blacksquare$

O corolário acima fornece uma regra de bolso bastante simples para a determinação do gradiente de mobilidade de uma localidade cujos migrantes vão todos para um único destino, como foi o caso de várias cidades do Nordeste na segunda metade do século XX, que, devido à seca e à má gestão das políticas públicas, viram grande parte de sua população migrar para São Paulo, o que implica $\mathcal{H}_i \approx 1$. Nesse caso, podemos usar a aproximação $\nabla_i(\mathbf{N}) \approx \tau\lambda_i$, ou seja, o produto entre a percentagem de migrantes na população total da região vezes a fração desse total devida à localidade i.

Além disso, se o número de localidades é grande, então podemos dizer que $0.7 \times \tau\lambda_i \leq \nabla_i(\mathbf{N}) \leq \tau\lambda_i$. Portanto, $\lambda_i^2 \leq \lambda_i\nabla_i(\mathbf{N}) \leq \tau\lambda_i^2$, donde $0.7 \times \tau \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2 \leq \partial(\mathbf{N}) \leq \tau \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2$. Seja $\varphi = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2$ o índice de Hirschmann-Herfindahl das participações migratórias de cada localidade. Então $0.7 \times \tau\varphi \leq \partial(\mathbf{N}) \leq \tau\varphi$.

Outra consequência do teorema é a seguinte caracterização alternativa do gradiente de mobilidade:

$$\partial(\mathbf{N}) = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2 \times \sqrt{1+\mathcal{H}_i}$$

Finalmente, lembre que a medida contábil de mobilidade é $\mu(\mathbf{N}) = \frac{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}{n_{\bullet\bullet}}$, que é justamente τ. Logo:

$$\partial(\mathbf{N}) = \mu(\mathbf{N}) \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2 \times \sqrt{1+\mathcal{H}_i}$$

ou seja, nossa medida $\partial(\mathbf{N})$ é uma correção da medida contábil pelo fator $\theta(\mathbf{N}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2 \times \sqrt{1+\mathcal{H}_i}$.

Teorema: $\frac{1}{\sqrt{2K(K-1)}} \mu(\mathbf{N}) \leq \partial(\mathbf{N}) \leq \mu(\mathbf{N})$.

Demonstração: O valor mínimo de $\theta(\mathbf{N})$ ocorre quando, em uma região, a participação percentual de cada localidade na migração total é a mesma ($\lambda_i = \frac{1}{K}$) e os migrantes de cada localidade se distribuem uniformemente em todas as demais ($\mathcal{H}_i = \frac{1}{K-1}$). Nesse caso, $\theta(\mathbf{N}) = \frac{1}{\sqrt{2K(K-1)}}$. O valor máximo de $\theta(\mathbf{N})$ ocorre quando uma única localidade é reposnsável por toda a migração ($\lambda_i = 1$, para algum i, e $\lambda_k = 0$, para todo $k \neq i$) e os migrantes dessa localidade se mudam todos para o mesmo destino ($\mathcal{H}_i = 1$). Nesse caso, $\theta(\mathbf{N}) = 1$. Logo, a medida gradiente de mobilidade reduz a medida contábil pelo fator $\theta(\mathbf{N})$, ou seja, $\partial(\mathbf{N}) = \theta(\mathbf{N}) \times \mu(\mathbf{N})$, em que $\theta(\mathbf{N}) \in [\frac{1}{\sqrt{2K(K-1)}}, 1]$. ■

Do resultado anterior, se o número de localidades é grande, então $\theta(\mathbf{N}) \in [0,1]$, de modo que $0 \leq \partial(\mathbf{N}) \leq \mu(\mathbf{N})$. Uma última consideração faz-se necessária. Se quisermos utilizar uma aproximação razoável, do ponto de vista prático, para a nossa medida gradiente de mobilidade, qual seria? Se aplicarmos a medida gradiente a uma matriz de migração envolvendo os municípios de uma UF do Brasil que seja caracterizada por capital grande e demais municípios bastante pequenos, é natural supor que a direção de migração dentro da UF é a capital do estado, que geralmente é a maior cidade e a que mais atrai os migrantes. Ademais, a migração da capital para as cidades menores poderia ser considerada negligível. Se esse for o caso, para cada município da UF que não seja a capital, o índice de Hirschmann-Herfindahl $\mathcal{H}_i$ será próximo de seu valor máximo, devido à concentração do destino migratório, ou seja, $\mathcal{H}_i \approx 1$. Para a capital, i_o, teremos $\mathcal{H}_{i_o} \approx 0$. Nessas condições, também teremos $\lambda_{i_o} \approx 0$. Portanto, $\partial(\mathbf{N}) \approx \mu(\mathbf{N}) \sum_{i \neq i_o} \lambda_i^2$, isto é, $\partial(\mathbf{N}) \approx \mu(\mathbf{N})\varphi$. Ainda nesse caso, a aproximação pode ser expressa em termos da matriz $\mathbf{Q}$. De fato, $\lambda_i = \frac{n_{i\bullet} - n_{ii}}{n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}}$. De $\lambda_i = \frac{(n_{i\bullet} - n_{ii})/n_{\bullet\bullet}}{\left(n_{\bullet\bullet} - \sum_{i=1}^{K} n_{ii}\right)/n_{\bullet\bullet}}$ temos $\lambda_i = \frac{q_{i\bullet} - q_{ii}}{1 - \sum_{i=1}^{K} q_{ii}}$, ou seja, $\lambda_i = \frac{q_{i\bullet}-q_{ii}}{1-tr(\mathbf{Q})}$. Dado que $\varphi = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i^2$, temos $\varphi = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{q_{i\bullet}-q_{ii}}{1-tr(\mathbf{Q})}\right)^2$. Lembrando que $\mu(\mathbf{N}) = 1 - tr(\mathbf{Q})$, então é fácil ver que $\mu(\mathbf{N})\varphi = \frac{1}{1-tr(\mathbf{Q})} \sum_{i=1}^{K} (q_{i\bullet} - q_{ii})^2$. Assim:

$$\partial(\mathbf{N}) \approx \frac{1}{1 - tr(\mathbf{Q})} \sum_{i=1}^{K} (q_{i\bullet} - q_{ii})^2$$

Se aplicarmos a medida gradiente à matriz de migração interestadual, essa simplificação já não é aceitável.

4 Conclusão

A medida gradiente de mobilidade regional $\partial(\mathbf{N})$ é diferente das medidas usuais de mobilidade e tem por intuito capturar a intensidade migratória mediante o impacto marginal que as localidades de uma região têm sobre a distribuição populacional. Ela também capta a extensão migratória, uma vez que a medida contábil de mobilidade $\mu(\mathbf{N})$ é parte integrante de sua expressão. Mostramos, em particular, que $\partial(\mathbf{N}) = \theta(\mathbf{N})\mu(\mathbf{N})$, em que o fator de correção $\theta(\mathbf{N}) \in [\frac{1}{\sqrt{2K(K-1)}}, 1]$ captura a intensidade migratória, conforme dissemos. Dessa forma, a natureza metodológica de nossa medida é do tipo:

$$\underbrace{\text{mobilidade}}_{\partial(\mathbf{N})} = \underbrace{\text{intensidade}}_{\theta(\mathbf{N})} \times \underbrace{\text{extensão}}_{\mu(\mathbf{N})}$$

Encontramos, também, intervalos específicos aos quais os valores da medida gradiente pertencerão, sendo que os limites desses intervalos dependerão, por sua vez, de outras medidas simples. Por fim, para casos específicos que, quando ocorrem, são facilmente percebidos, encontramos caracterizações bastante simples da medida gradiente.

Referência

[1] Souza, J. (1988): *Métodos Estatísticos nas Ciências Psicossociais*, volume I: Técnicas de análise social e espacial. Editora Thesaurus, Brasília.